Областное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Курский электромеханический техникум»

Справочные материалы

по учебному предмету

ООПу.03 Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия.

Раздел I. Алгебра и начала математического анализа

Составители:

Николаенко Н.В.

Севрюкова Л.А.

Выполнил:

Ст-т Королев И.А.

2018

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Сборник справочных материалов по учебному предмету ООПу.03 Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия содержит свойства степеней, корней n-ой степени и логарифмов; основные формулы и тождества по разделу «Алгебра и начала математического анализа», а также таблицы значений тригонометрических функций.

Материалы сборника предназначены для обучающихся первого и второго курса всех специальностей и профессий и могут быть использованы как на уроках математики, так и при выполнении самостоятельных и домашних работ.

1. Формулы сокращенного умножения

1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

3) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;

4) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;

5) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;

6) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

7) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

2. Свойства корней степени n

Если $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c > 0$, $m \in N$, $n \in N$, $m \geq 2$, $n \geq 2$, то:

1) $\sqrt[n]{a^n} = a$;

2) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

3) $\sqrt[n]{\frac{a}{c}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{c}}$;

4) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$;

5) $\sqrt[nm]{a^m} = \sqrt[n]{a}$;

6) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

3. Свойства степеней

Если a >0, m ϵ R, n ϵ R, то:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$;

3) $(a^m)^n = a^{mn}$;

4) если a>1, m<n, то $a^m < a^n$;

5) если 0<a<1, m<n, то $a^m > a^n$;

6) $a^0 = 1$.

Если a ≠ 0, n ϵ N, то

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Если $\frac{p}{q}$ - обыкновенная дробь, q ≠ 1 и a ≥0, то

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}\ .$$

4. Свойства логарифмов

Если $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, $m > 0$, $n > 0$, $k \in R$, то:

1) $\log_a a = 1$;

2) $\log_a 1 = 0$;

3) $\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$;

4) $\log_a (\frac{m}{n}) = \log_a m - \log_a n$;

5) $\log_a m^k = k \log_a m$;

6) $\log_{a^k} m = \frac{1}{k} \log_a m$;

7) $\log_a m = \frac{\log_b m}{\log_b a}$;

8) Если $a > 1$, $b < c$, то $\log_a b < \log_a c$;

9) Если $0 < a < 1$, $b < c$, то $\log_a b > \log_a c$

$a^{\log_a b} = b$ – основное логарифмическое тождество.

5. Перестановки, размещения, сочетания

Если n ϵ N, k ϵ N, k ≤ n, то:

$P_n = n!$

$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1);$

$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!};$

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots + C_n^{n-1} b^{n-1} + C_n^n b^n$$

– бином Ньютона,

$C_n^0,\ C_n^1,\ C_n^2,\ C_n^3, \ldots,\ C_n^n$ – биномиальные коэффициенты.

6. Таблица значений десятичных логарифмов

Таблица десятичных логарифмов целых чисел от 0 до 99 с округлением до пятого знака после запятой

Десятки	**Единицы**									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	–	0	0,30103	0,47712	0,60206	0,69897	0,77815	0,84510	0,90309	0,95424
1	1	1,04139	1,07918	1,11394	1,14613	1,17609	1,20412	1,23045	1,25527	1,27875
2	1,30103	1,32222	1,34242	1,36173	1,38021	1,39794	1,41497	1,43136	1,44716	1,46240
3	1,47712	1,49136	1,50515	1,51851	1,53148	1,54407	1,55630	1,56820	1,57978	1,59106
4	1,60206	1,61278	1,62325	1,63347	1,64345	1,65321	1,66276	1,67210	1,68124	1,69020
5	1,69897	1,70757	1,71600	1,72428	1,73239	1,74036	1,74819	1,75587	1,76343	1,77085
6	1,77815	1,78533	1,79239	1,79934	1,80618	1,81291	1,81954	1,82607	1,83251	1,83885
7	1,84510	1,85126	1,85733	1,86332	1,86923	1,87506	1,88081	1,88649	1,89209	1,89763
8	1,90309	1,90849	1,91381	1,91908	1,92428	1,92942	1,93450	1,93952	1,94448	1,94939
9	1,95424	1,95904	1,96379	1,96848	1,97313	1,97772	1,98227	1,98677	1,99123	1,99564

Чтобы воспользоваться таблицей выберите число десятков по вертикали, число единиц по горизонтали и на пересечении увидите результат. Например, lg10 = 1

7. *Таблица значений натуральных логарифмов*

Таблица натуральных логарифмов целых чисел от 0 до 99 с округлением до пятого знака после запятой

Десятки	**Единицы**									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	–	0	0,69315	1,09861	1,38629	1,60944	1,79176	1,94591	2,07944	2,19722
1	2,30259	2,39790	2,48491	2,56495	2,63906	2,70805	2,77259	2,83321	2,89037	2,94444
2	2,99573	3,04452	3,09104	3,13549	3,17805	3,21888	3,25810	3,29584	3,33220	3,36730
3	3,40120	3,43399	3,46574	3,49651	3,52636	3,55535	3,58352	3,61092	3,63759	3,66356
4	3,68888	3,71357	3,73767	3,76120	3,78419	3,80666	3,82864	3,85015	3,87120	3,89182
5	3,91202	3,93183	3,95124	3,97029	3,98898	4,00733	4,02535	4,04305	4,06044	4,07754
6	4,09434	4,11087	4,12713	4,14313	4,15888	4,17439	4,18965	4,20469	4,21951	4,23411
7	4,24850	4,26268	4,27667	4,29046	4,30407	4,31749	4,33073	4,34381	4,35671	4,36945
8	4,38203	4,39445	4,40672	4,41884	4,43082	4,44265	4,45435	4,46591	4,47734	4,48864
9	4,49981	4,51086	4,52179	4,5326	4,54329	4,55388	4,56435	4,57471	4,58497	4,59512

Чтобы воспользоваться таблицей выберите число десятков по вертикали, число единиц по горизонтали и на пересечении увидите результат. Например, ln42 = 3,73767

8. Значения тригонометрических функций для различных углов

Угол / Функция	0 или 0°	π/6 или 30°	π/4 или 45°	π/3 или 60°	π/2 или 90°	2π/3 или 120°	3π/4 или 135°	5π/6 или 150°	π или 180°	3π/2 или 270°	2π или 360°
sin α	0	1/2	√2/2	√3/2	1	√3/2	√2/2	1/2	0	–1	0
cos α	1	√3/2	√2/2	1/2	0	-1/2	-√2/2	-√3/2	–1	0	1
tg α	0	√3/3	1	√3	–	-√3	-1	-√3/3	0	–	0
ctg α	–	√3	1	√3/3	0	-√3/3	-1	-√3	–	0	–

9. Таблица формул приведения

Угол в рад. / Функция	π/2 – α	π/2 + α	π – α	π + α	3π/2 – α	3π/2 + α	2π – α	2π + α
sin	cos α	cos α	sin α	– sin α	– cos α	– cos α	– sin α	sin α
cos	sin α	– sin α	– cos α	– cos α	– sin α	sin α	cos α	cos α
tg	ctg α	– ctg α	– tg α	tg α	ctg α	– ctg α	– tg α	tg α
ctg	tg α	– tg α	– ctg α	ctg α	tg α	– tg α	– ctg α	ctg α
Угол в ° / Функция	**90° – α**	**90° + α**	**180° – α**	**180° + α**	**270° – α**	**270° + α**	**360° – α**	**360° + α**

10. Основные формулы тригонометрии

Основные тригонометрические тождества:

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;
2) $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$;
3) $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;
4) $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;
5) $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;
6) $1 + ctg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

Формулы сложения:

1) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$;
2) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$;
3) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$;
4) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$;
5) $tg(\alpha + \beta) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$;
6) $tg(\alpha - \beta) = \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$;
7) $ctg(\alpha + \beta) = \dfrac{ctg\alpha \cdot ctg\beta + 1}{ctg\beta - ctg\alpha}$;
8) $ctg(\alpha - \beta) = \dfrac{ctg\alpha \cdot ctg\beta - 1}{ctg\beta + ctg\alpha}$.

Формулы двойного угла:

1) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

2) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$;

3) $tg 2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$;

4) $ctg 2\alpha = \dfrac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$.

Формулы понижения степени:

1) $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$;

2) $\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$.

Формулы перехода от произведения тригонометрических функций к их сумме:

1) $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$;

2) $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$;

3) $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$.

Формулы перехода от суммы тригонометрических функций к их произведению:

1) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

2) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$;

3) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

4) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;

5) $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

6) $\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

7) $\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$;

8) $\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

Формулы половинного угла:

1) $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$;

2) $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$;

3) $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

11. Простейшие тригонометрические уравнения

$\sin x = a$, $\lvert a\rvert < 1$, $a \neq 0$ $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in Z$;	$\cos x = a$, $\lvert a\rvert < 1$, $a \neq 0$ $x = \pm \arccos a + 2\pi k$, $k \in Z$;
$\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$;	$\cos x = 1$, $x = 2\pi k$, $k \in Z$;
$\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$;	$\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$;
$\sin x = 0$, $x = \pi k$, $k \in Z$;	$\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$;
$\mathrm{tg}\, x = a$, $a \in R$, $x = \mathrm{arctg}\, a + \pi k$, $k \in Z$;	$\mathrm{ctg}\, x = a$, $a \in R$, $x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi k$, $k \in Z$.

12. Формулы для арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса

1) $\arcsin(-\alpha) = -\arcsin\alpha$;
2) $\arccos(-\alpha) = \pi - \arccos\alpha$;
3) $\mathrm{arctg}(-\alpha) = -\mathrm{arctg}\,\alpha$.
4) $\mathrm{arcctg}(-\alpha) = \pi - \mathrm{arcctg}\,\alpha$.

13. *Правила преобразования графиков функций*

Общий вид функции	Преобразования
y = f(x – b)	***Параллельный перенос графика вдоль оси абсцисс на |b| единиц*** • вправо, если b > 0; • влево, если b < 0 .
y = f(x + b)	• влево, если b > 0; • вправо, если b < 0 .
y = f(x) + m	***Параллельный перенос графика вдоль оси ординат на |m| единиц*** • вверх, если m > 0; • вниз, если m < 0 .
	Отражение графика
y = f(-x)	Симметричное отражение графика относительно оси ***ординат***
y = - f(x)	Симметричное отражение графика относительно оси ***абсцисс***
	Сжатие и растяжение графика
y = f(kx)	• При k>1 – сжатие графика к оси ординат в k раз, • при 0<k<1 – растяжение графика от оси ординат в k раз.
y = kf(x)	• При k>1 – растяжение графика от оси абсцисс в k раз, • при 0<k<1 – сжатие графика к оси абсцисс в k раз.
	Преобразование графика с модулем
y = |f(x)|	• При f(x)>0 – график остаётся без изменений, • при f(x)<0 – график симметрично отражается относительно оси абсцисс
y = f(|x|)	• При x≥0 – график остаётся без изменений, • при x<0 – график симметрично отражается относительно оси ординат

14. Правила дифференцирования

1. Производная суммы или разности функций

$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$.

2. Производная произведения постоянной на функцию:

$(c \cdot f(x)' = c \cdot f'(x), c = const$.

3. Производная произведения двух функций:

$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$.

4. Производная частного:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}.$$

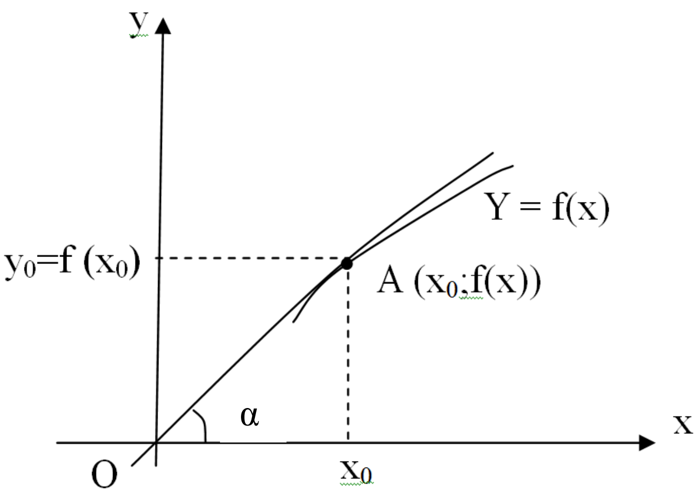
5. Производная сложной функции $z = \varphi(g(x))$

$z' = \varphi'(g) \cdot g'(x)$.

15. Таблица производных

$c' = 0$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in R$, $n \neq 0$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(e^x)' = e^x$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

16. Уравнение касательной



$y_0=f(x_0)$

$k = f'(x_0) = tg\alpha$

$y - y_0 = k(x - x_0)$

17. Таблица неопределенных интегралов

$\int dx = x + C$	$\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$
$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ (n \neq -1)$	$\int \frac{dx}{sin^2 x} = -\ ctgx + C$
$\int \frac{dx}{x} = ln\ \lvert x\rvert + C$	$\int \frac{dx}{x^{2-}a^2} = \frac{1}{2a} ln \left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{ln\, a} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln \left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$
$\int e^x\, dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin\, \frac{x}{a} + C$
$\int sin\, x\, dx = -\, cos\, x + C$	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\, \frac{x}{a} + C$
$\int cos\, x\, dx = sin\, x + C$	

18. Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

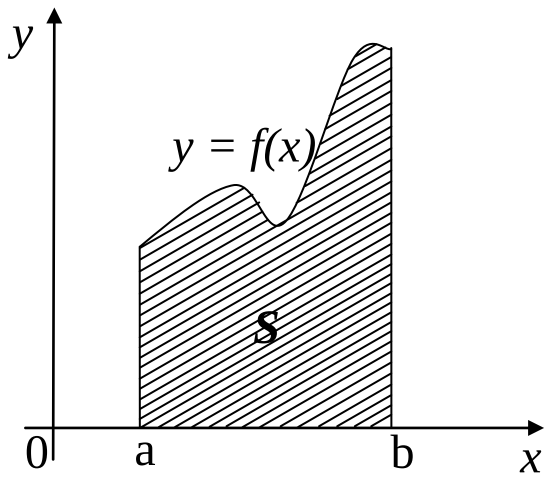
19. Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$;

2. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;

3. $\int_a^b \big(f(x) + \varphi(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx$

20. Площадь криволинейной трапеции



$$S = \int_a^b f(x)dx,\ f(x) \geq 0$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л., Яковлев Г.Н. Математика (Книга 1): Учебное пособие. – М.: Новая волна, 2013.

2. Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л., Яковлев Г.Н. Математика (Книга 2): Учебное пособие. – М.: Новая волна, 2013.

3. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2012.

4. Никольский С.М. Потапов М.Н. Алгебра и начала математического анализа: учебник для 10 класса общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни. – М.: Просвещение, 2014.